Eigenschaften des pascalschen Dreiecks

Primzahlen, Fraktale, Fibonacci-Folge

Spektrum - Die Woche 51 2023 „Die faszinierenden Eigenschaften des pascalschen Dreiecks“

Bearbeitung M. Wilfling 2024

!

Der Aufbau lässt sich wie ein Tannenbaum konstruieren:

- Starte mit einem gleichseitigen Dreieck mit 3 Einsen
- Füge eine zentrierte Zeile mit einem Element mehr als darüber hinzu, die äußeren Ränder erhalten links und rechts eine Eins
- Die Elemente dazwischen erhalten ihren Wert als Summe der darüber liegenden Elemente

Obwohl 1655 von Blaise Pascal (1623-1662) veröffentlicht, taucht es bereits ca. 700 Jahre zuvor in den Schriften des persischen Mathematikers Abu al-Karadschi (953-1029) auf. Damals verwendet er es zum Bestimmen der Vorfaktoren binomischer Formen $(a+b)^n$.

Das Dreieck für 8 Zeilen:

1

1 1

↘ ↙

1 2 1

↘ ↙ ↘ ↙

1 3 3 1

↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙

1 4 6 4 1

↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙

1 5 10 10 5 1

↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙

1 6 15 20 15 6 1

↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙

1 7 21 35 35 21 7 1

Vorfaktoren:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$$

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10 \cdot a^3 b^2 + 10 \cdot a^2 b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5$$

$$(a+b)^6 = 1 \cdot a^6 + 6 \cdot a^5 b + 15 \cdot a^4 b^2 + 20 \cdot a^3 b^3 + 15 \cdot a^2 b^4 + 6 \cdot ab^5 + 1 \cdot b^6$$

$$(a+b)^7 = 1 \cdot a^7 + 7 \cdot a^6 b + 21 \cdot a^5 b^2 + 35 \cdot a^4 b^3 + 35 \cdot a^3 b^4 + 21 \cdot a^2 b^5 + 7 \cdot ab^6 + 1 \cdot b^7$$

Anders als Al-Karadschi ist Pascal gemeinsam mit Fermat an Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (sprich: n über k) interessiert:

$$B(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\dots\cdot n}{2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-k)}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}$$

Beachte:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-1} = n$$

Die Anzahl der Möglichkeiten für „6 aus 45“ lässt sich im pascalschen Dreieck in der 45. Reihe und 6. Spalte ablesen: 8145060.

Eine weitere Eigenschaft: Die Summe der Vorfaktoren ergibt immer eine Zweierpotenz!

$$\begin{array}{lcl}
1 & 1 & = 1 = 2^0 \\
2 & 1 + 1 & = 2 = 2^1 \\
3 & 1 + 2 + 1 & = 4 = 2^2 \\
4 & 1 + 3 + 3 + 1 & = 8 = 2^3 \\
5 & 1 + 4 + 6 + 4 + 1 & = 16 = 2^4 \\
6 & 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 & = 32 = 2^5 \\
7 & 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 & = 64 = 2^6 \\
8 & 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 & = 128 = 2^7
\end{array}$$

1640 formuliert Fermat den Satz: Sei $a \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ (p ist prim). Dann gilt:

$$a^p \mod p = a$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccl}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & = 2^0 \\
 & & & & & & & 1 & + & 1 & & & & & & & = 2^1 \\
 & & & & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & & & & = 2^2 \\
 & & & & & {\color{red}1} & + & {\color{red}3} & + & {\color{red}3} & + & {\color{red}1} & & & & & = 2^{\color{red}3} \\
 & & & & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & & & & = 2^4 \\
 & & & {\color{red}1} & + & {\color{red}5} & + & {\color{red}10} & + & {\color{red}10} & + & {\color{red}5} & + & {\color{red}1} & & & = 2^{\color{red}5} \\
 & & 1 & + & 6 & + & 15 & + & 20 & + & 15 & + & 6 & + & 1 & & = 2^6 \\
 & {\color{red}1} & + & {\color{red}7} & + & {\color{red}21} & + & {\color{red}35} & + & {\color{red}35} & + & {\color{red}21} & + & {\color{red}7} & + & {\color{red}1} & = 2^{\color{red}7}
\end{array}$$

Man erkennt an den inneren Faktoren ungleich Eins bei Zeilen mit primzahligen Exponenten, dass diese durch selbige teilbar sind.

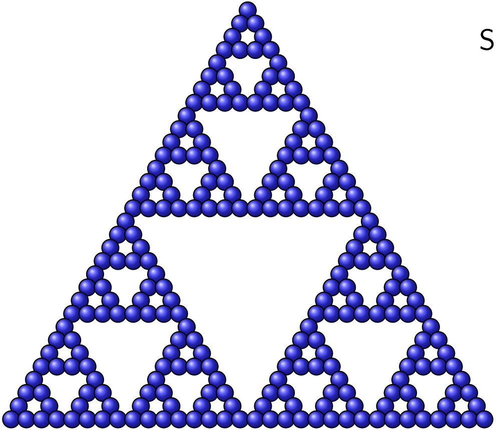
Die beiden Diagonalen, die parallel zu den äußeren Einser-Reihen verlaufen, listen die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auf. Grund: schräg darüber befindet sich immer eine Eins $\Rightarrow$ in der nächsten Zeile steht ein Wert um Eins größer.

In den zweiten Diagonalen daneben erkennt man $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (Gauß), was aber $B(n+1,2)$, also dem Wert der $(n+1)$. Reihe und Spalte 2 entspricht.

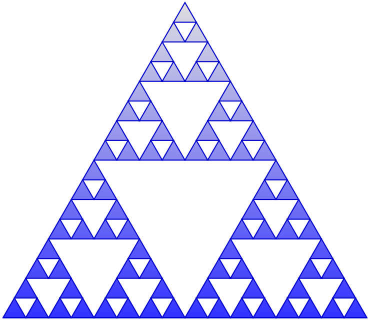
$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & \boxed{2} & & \boxed{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{5} & & \boxed{10} & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{6} & & \boxed{15} & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & \boxed{7} & & \boxed{21} & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Ein fraktales Muster entsteht, wenn man ungerade Koeffizienten im pascalschen Dreieck einfärbt. Ein gleichseitiges Dreieck, in das 4 kongruente Dreiecke eingeschrieben werden (rekursiv), nennt man **Sierpinski-Dreieck**.

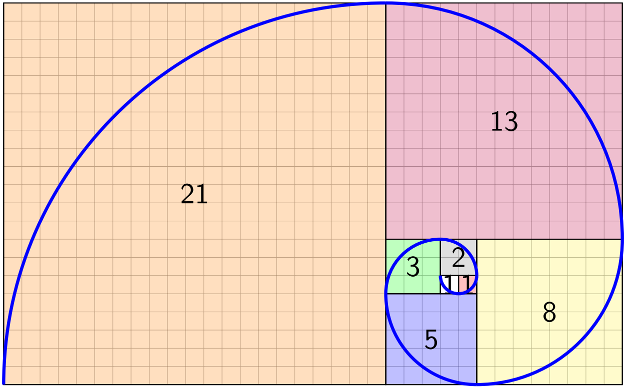
Pascalsches Dreieck, 32 Zeilen



Sierpinski-Dreieck der Ordnung 4

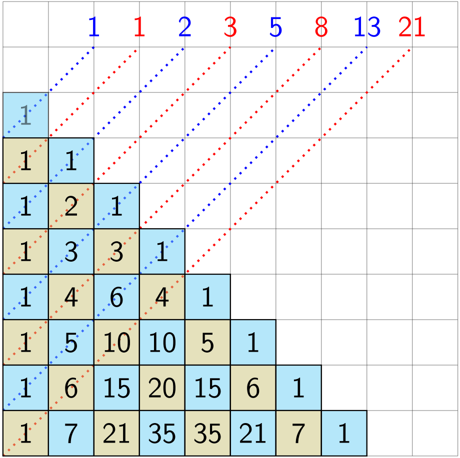


Zwei nebeneinander liegenden Quadrate mit Länge 1 bilden den Start für diese Grafik. Fortlaufend wird im Uhrzeigersinn ein angrenzendes Quadrat gebildet, wobei die Seitenlängen einer Wachstumsfolge folgen: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$, $8 = 5 + 3$, $13 = 8 + 5$, $21 = 13 + 8$, $\ldots$ Fibonacci lässt grüßen: $F(1) = 1$, $F(2) = 1$, $\forall n > 2 :\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.



Und was hat das mit dem pascalschen Dreieck zu tun?

Summiert man die darüber liegenden Koeffizienten, erhält man die Fibonacci-Zahlen.



Mersenne-Primzahlen haben die Form $2^n - 1$. Will man z.B. $2^4 - 1$, braucht man nur die Koeffizienten im Dreieck bis zur Zeile 4 summieren. Für die Zeile 8 ergibt sich $2^8 - 1 = 255$. Diese Zahlen sollte jedem Informatiker ein Begriff sein!

1	1	2^0	
2	1 1	2^1	
3	1 2 1	2^2	$7 = 2^3 - 1$
4	1 3 3 1	2^3	$15 = 2^4 - 1$
5	1 4 6 4 1	2^4	$\boxed{31} = 2^5 - 1$
6	1 5 10 10 5 1	2^5	$63 = 2^6 - 1$
7	1 6 15 20 15 6 1	2^6	$127 = 2^7 - 1$
8	1 7 21 35 35 21 7 1	2^7	$\boxed{255} = 2^8 - 1$

Die Mersenne-Primzahl für $n = 5$ ergibt sich aus

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \boxed{31}$$

Für die ersten 8 Zeilen des pascalschen Dreiecks stimmt die Behauptung:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

Gilt das aber auch für beliebige n?
In der Mathematik gibt des den „Beweis durch vollständige Induktion“.
Dabei zeigt man, dass die Behauptung für $n = 1$ richtig ist $\Rightarrow$ „trivial“:-)
Nun nehmen wir an, dass selbige für n gilt. Wenn daraus folgt, dass die Aussage auch für $n + 1$ richtig ist, haben wir gewonnen. Los geht's!

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \underbrace{2^n - 1}_{} \tag{1}$$

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}}_{} + 2^n = \underbrace{2^n - 1}_{} + 2^n = 2^{n+1} - 1 \tag{2}$$

Es sieht die Kuh mit dem Schweif, dass man die rechte Seite von (1) in (2) auf der linken Seite einsetzen kann. Dann braucht man nur zu wissen, dass $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ ergibt. Fertig! $\square$